

GEOMETRÍA TANGENCIAS Y ENLACES

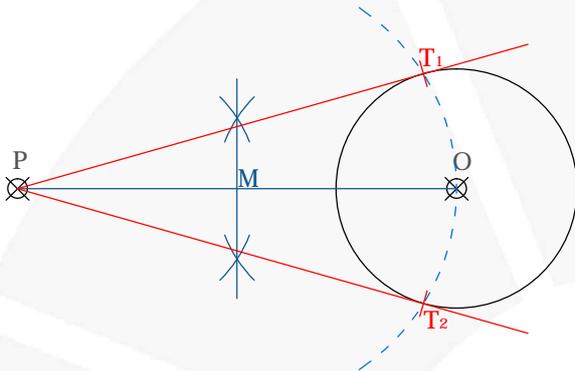
TANGENTE significa que un elemento (recta o curva) toca a otro únicamente en un punto: el punto de tangencia **T**

Podemos tener: - rectas tangentes a circunferencias

- circunferencias tangentes entre sí, en este 2º caso se llaman ENLACES

RECTAS TANGENTES

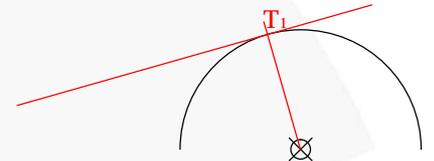
1) Recta tangente de un punto a una circunferencia.



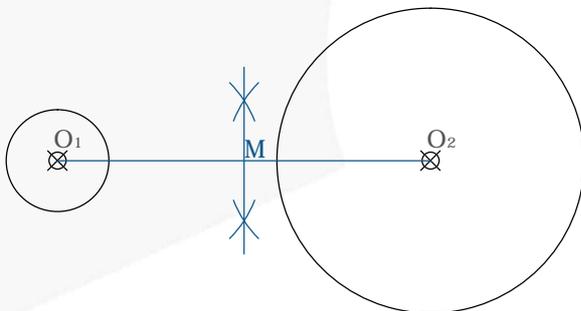
Para trazar las rectas tangentes unimos El punto y el centro de la circunferencia y desde el punto medio M hacemos un arco que pase por O. Los puntos de corte resultantes son los de tangencia

La recta tangente siempre es perpendicular al radio de la circunferencia desde T.

Señalaremos el punto de tangencia con una rayita en dirección del radio.

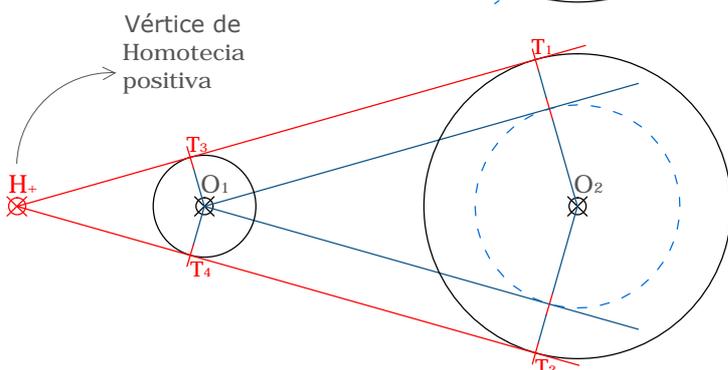
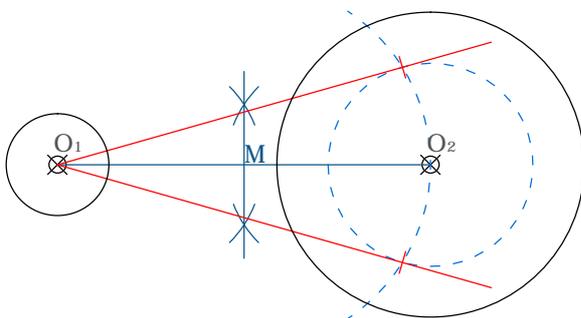


2) Rectas tangentes entre dos circunferencias.



Las rectas tangentes a dos circunferencias son 4:

- Dos rectas EXTERIORES
El punto donde se cortan las rectas está a un lado de ambas y alineado con sus centros.
Y es por tanto el centro de HOMOTECIA o semejanza positiva.
- Dos rectas INTERIORES
El punto donde se cortan las rectas está situado entre las dos circunferencias y alineado con sus centros.
Es el centro de HOMOTECIA o semejanza negativa

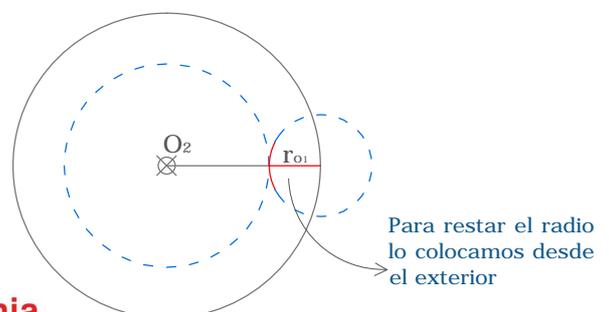


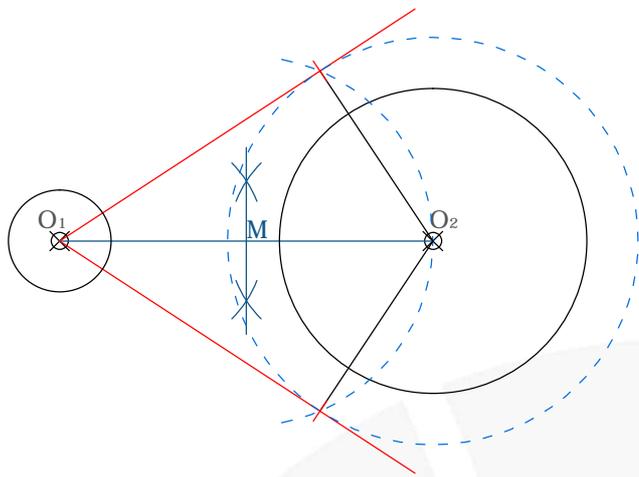
RECTAS TANGENTES EXTERIORES

Si consideramos el punto como circunferencia de radio cero, en realidad es el mismo problema anterior.

Para que esto ocurra le **RESTAMOS EL RADIO** de la circunferencia pequeña a la grande y calculamos las tangentes del Punto a la circunferencia.

Después al alargar el radio y tocar con la circunferencia original, tendremos las rectas tangentes.

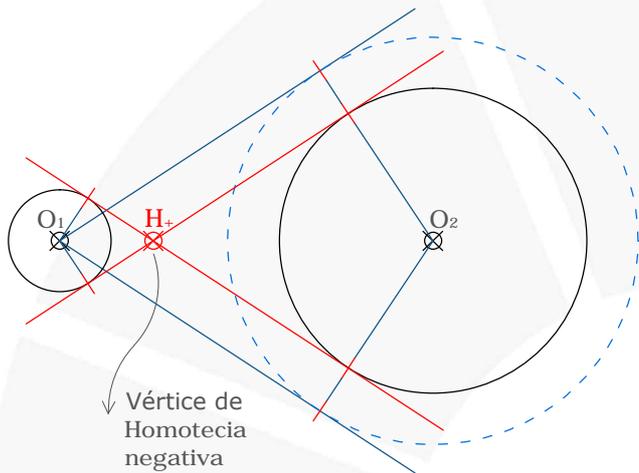
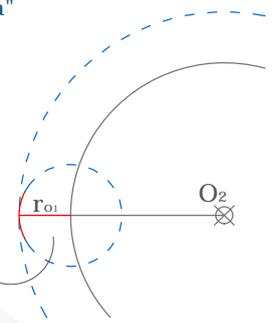




RECTAS TANGENTES INTERIORES

En este caso, vamos a **SUMAR EL RADIO** de las circunferencias. Realizamos el procedimiento "tangentes de un punto a una circunferencia" Después, en el corte del radio con la circunferencia original tendremos las rectas tangentes.

Para sumar el radio lo colocamos a continuación



CURVAS TANGENTES O ENLACES

Para encontrar las curvas tangentes vamos a necesitar una serie de datos previos.
La primera subdivisión clave es saber si conocemos el RADIO DE LA CIRCUNFERENCIA ENLACE.

- OPCIÓN 1) Dados dos elementos y el radio de enlace
- OPCIÓN 2) Dados tres elementos (conocidos como problemas de Apolonio)

DADOS DOS ELEMENTOS Y EL RADIO DE ENLACE

Conocido el radio, las posibilidades de enlaces son:

- 1) r·PP. PUNTO + PUNTO
- 2) r·PR. PUNTO + RECTA
- 3) r·RR. RECTA + RECTA
- 4) r·RC. RECTA + CIRCUNFERENCIA
- 5) r·PC. PUNTO + CIRCUNFERENCIA
- 6) r·CC. CIRCUNFERENCIA + CIRCUNFERENCIA

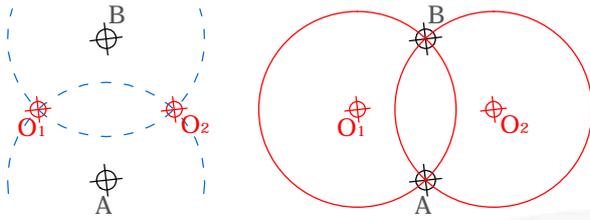
DADOS TRES ELEMENTOS: 10 PROBLEMAS DE APOLONIO

Radio desconocido, las posibilidades de enlaces son:

- 1) PPP. PUNTO + PUNTO + PUNTO
- 2) PPR. PUNTO + PUNTO + RECTA
- 3) PRR. PUNTO + RECTA + RECTA
- 4) RRR. RECTA + RECTA + RECTA
- 5) RRC. RECTA + RECTA + CIRCUNFERENCIA
- 6) RCC. RECTA + CIRCUNF. + CIRCUNFERENCIA
- 7) CCC. CIRCUNF. + CIRCUNF. + CIRCUNFERENCIA
- 8) PPC. PUNTO + CIRCUNF. + CIRCUNFERENCIA
- 9) PCC. PUNTO + PUNTO + CIRCUNFERENCIA
- 10) PRC. PUNTO + RECTA + CIRCUNFERENCIA

r-PP ENLACE ENTRE DOS PUNTOS

Radio dado: r



DOS SOLUCIONES POSIBLES

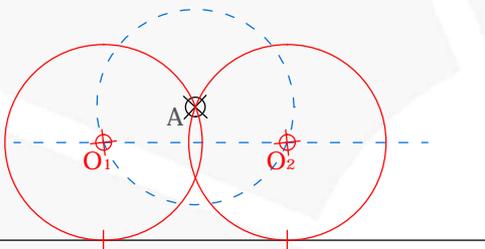
Con el radio dado, hacemos circunferencias con centro en A y B y dónde se cortan ambas, se encuentran los centros de las circunferencias SOLUCIÓN.

r-PR ENLACE ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

Radio dado: r

Dos posibilidades de ejercicio:

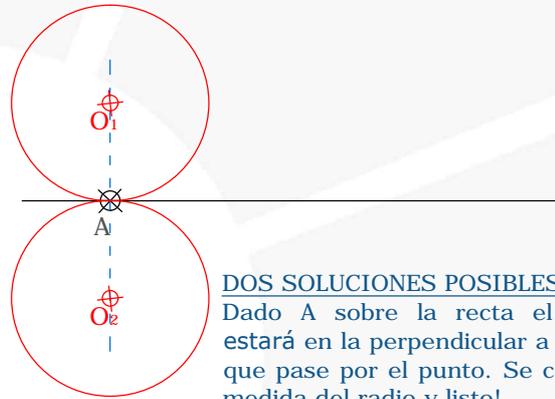
1) El punto es externo a la recta



DOS SOLUCIONES POSIBLES

Desde el punto A se traza una circunferencia de radio r . Desde la recta se traza una $//$ a r de distancia. Dónde se cortan ambos trazados se encuentran los puntos de la solución. No olvides marcar las tangencias en la recta!!

2) El punto está sobre la recta

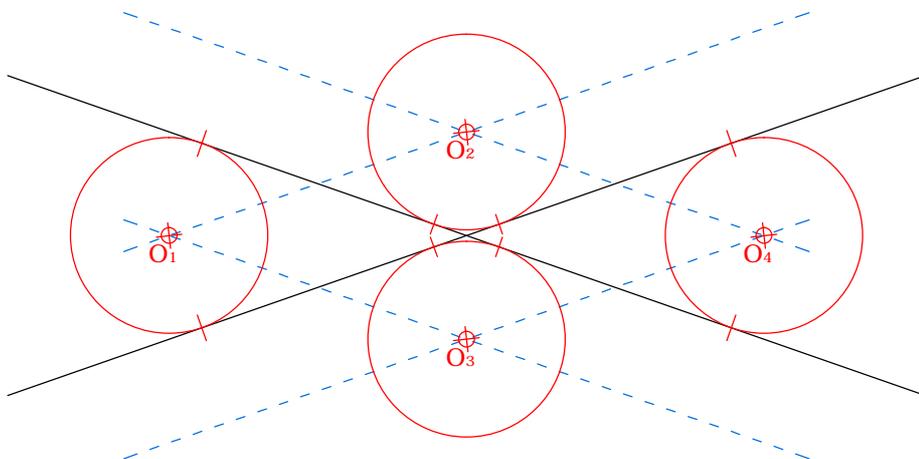


DOS SOLUCIONES POSIBLES

Dado A sobre la recta el centro estará en la perpendicular a la recta que pase por el punto. Se coloca la medida del radio y listo!

r-RR ENLACE ENTRE DOS RECTAS

Radio dado: r



CUATRO SOLUCIONES POSIBLES

Dadas dos rectas secantes, los centros de las circunferencias tangentes estarán en sus bisectrices.

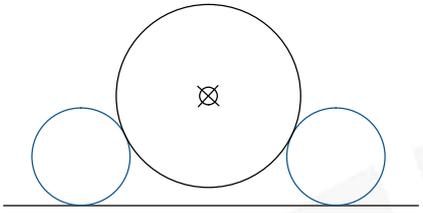
Se puede trazar las bisectrices y paralelas a una de las rectas a la distancia del radio, O bien (como en el dibujo) trazar paralelas a la distancia del radio a ambas rectas y por los dos lados. Salen hasta 4 soluciones posibles. RECUERDA marcar las tangencias.

r·RC ENLACE ENTRE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA

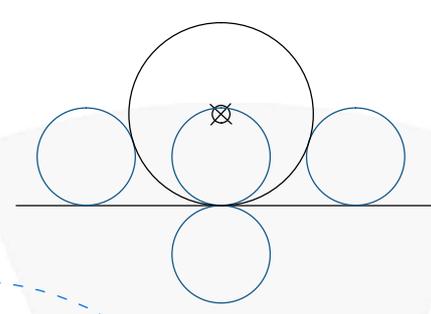
Radio dado: r

Dependiendo de la posición de la recta y la circunferencia hay más o menos soluciones posibles:

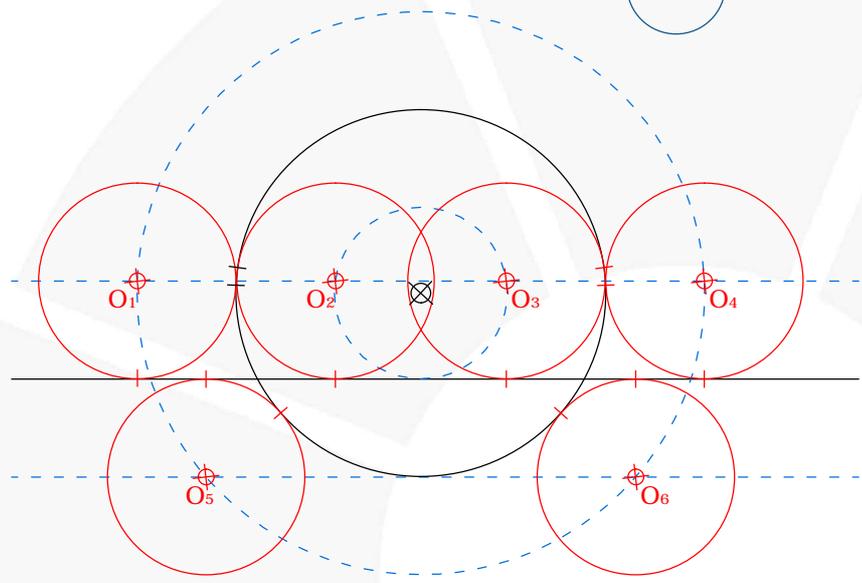
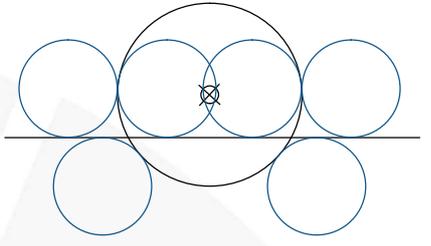
Circunferencia externa a la recta
2 SOLUCIONES POSIBLES



Circunferencia tangente a la recta
4 SOLUCIONES POSIBLES



Circunferencia secante a la recta
2 SOLUCIONES POSIBLES



SEIS SOLUCIONES POSIBLES

Dadas recta y circunferencia secantes, los centros solución de las circunferencias tangentes estarán en el corte de las circunferencias concéntricas separadas a un radio r de distancia y las rectas // a la recta original separadas también a un radio r de distancia. **RECUERDA** marcar las tangencias.

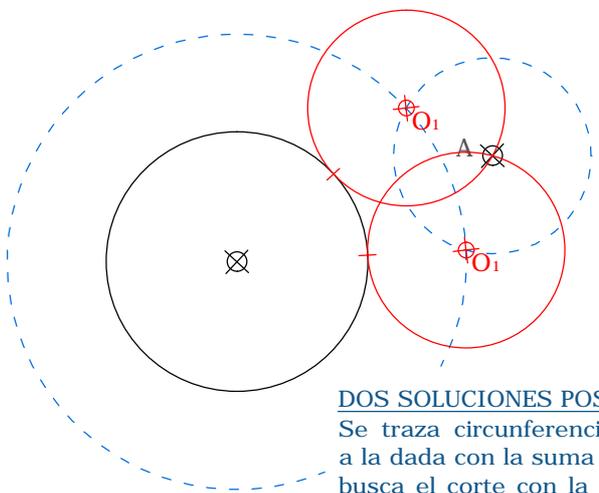
r·PC ENLACE ENTRE UN PUNTO Y UNA CIRCUNFERENCIA

Radio dado: r

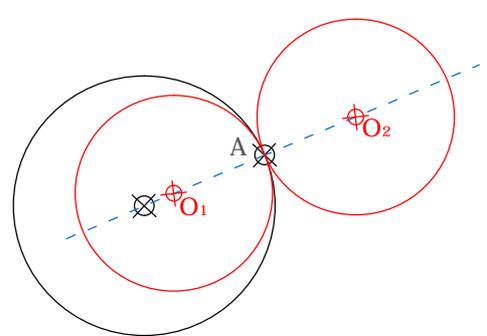
Dos posibilidades de ejercicio:

1) El punto es externo a la circunferencia

2) El punto está sobre la circunferencia



DOS SOLUCIONES POSIBLES
Se traza circunferencia concéntrica a la dada con la suma del radio y se busca el corte con la circunferencia de radio r trazada desde A. Allí salen los dos centros.



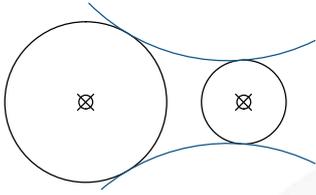
DOS SOLUCIONES POSIBLES
Si el punto está en la circunferencia es directamente el punto de tangencia, así que en la recta que une el centro con A encontraremos los centros a uno y otro lado del punto.

r-CC ENLACE ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

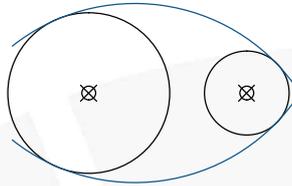
Radio dado: _____ r _____

A partir del radio existen hasta 8 soluciones posibles, dependiendo si son tangentes a las circunferencias por el exterior o las "recogen" en su interior:

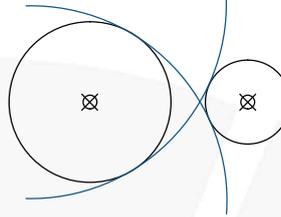
Enlace exterior/exterior
2 SOLUCIONES



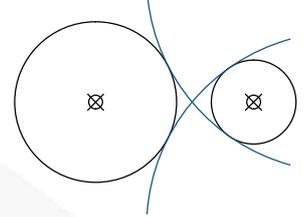
Enlace interior/interior
2 SOLUCIONES



Enlace interior/exterior
2 SOLUCIONES



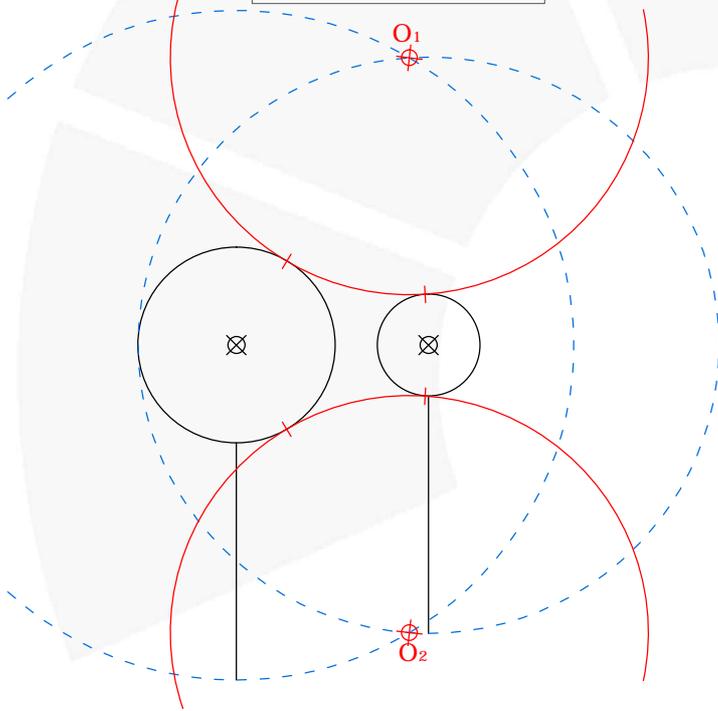
Enlace exterior/interior
2 SOLUCIONES



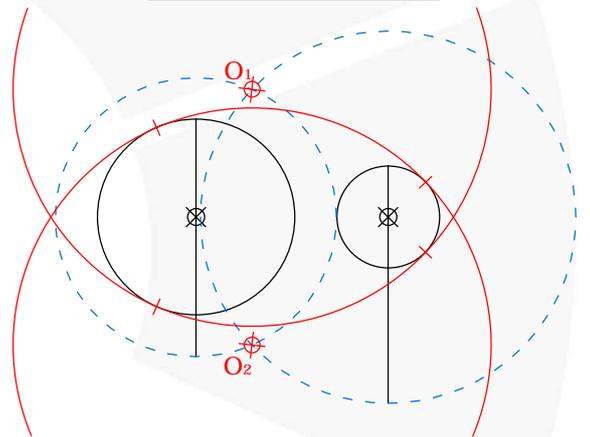
Si queremos que la circunferencia toque POR EL EXTERIOR, debemos **sumar el radio** de la circunferencia de enlace.

Si queremos que la circunferencia toque POR EL INTERIOR, debemos **colocar el radio** de la circunferencia de enlace **sobre un diámetro** de la dada.

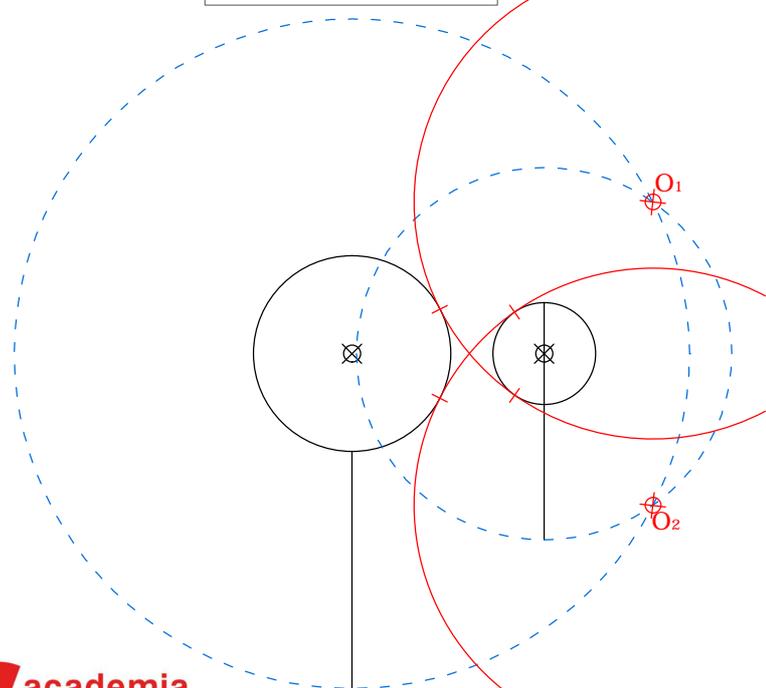
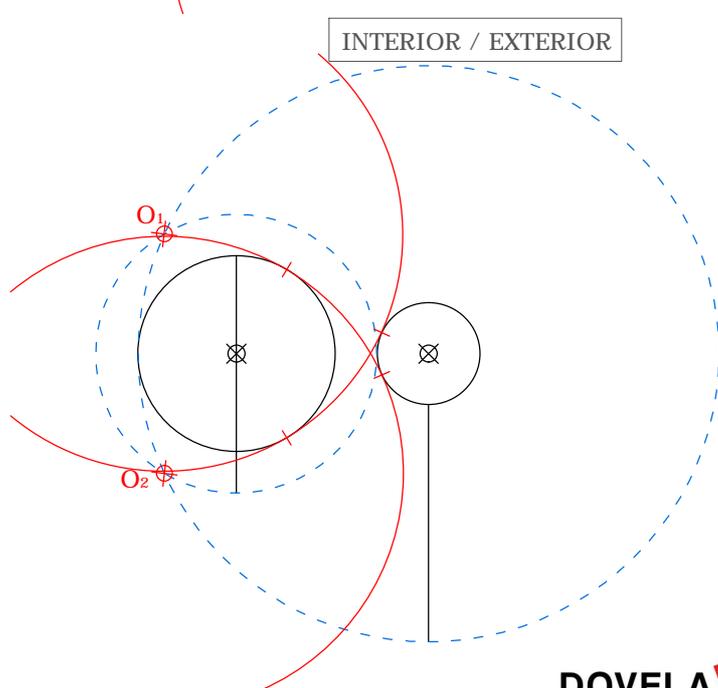
EXTERIOR / EXTERIOR



INTERIOR / INTERIOR



EXTERIOR / INTERIOR



LOS 10 PROBLEMAS de APOLONIO

SOLUCIÓN DIRECTA
con dos haces de centros

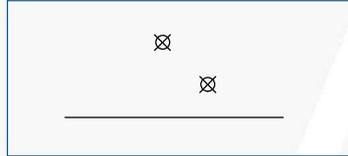
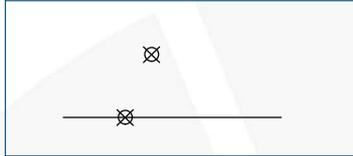
POR POTENCIAS
con un haz de centros directo
y un haz de centros por potencias

INVERSIÓN + POTENCIAS
encontramos puntos por inversión
y un haz de centros por potencias

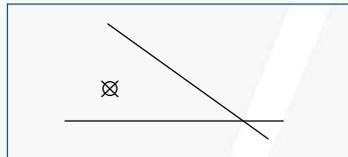
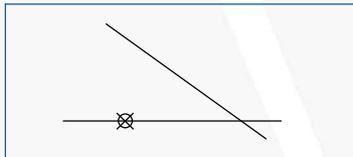
1 PPP



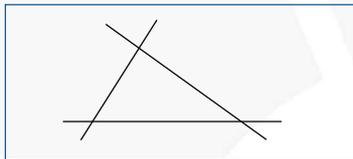
2 PPR



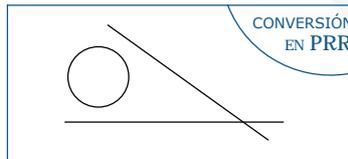
3 PRR



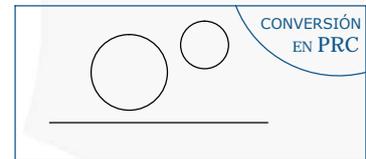
4 RRR



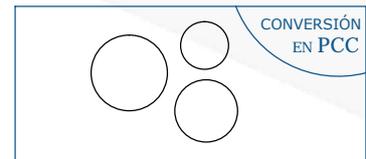
5 RRC



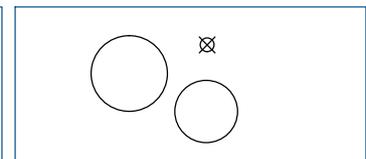
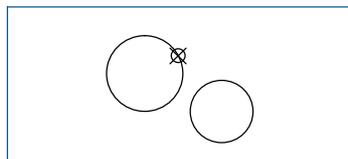
6 RCC



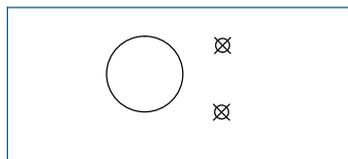
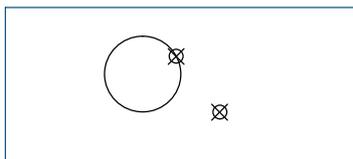
7 CCC



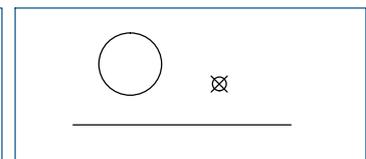
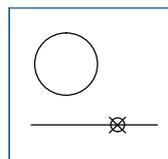
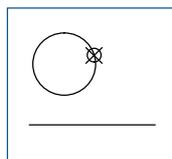
8 PCC



9 PPC

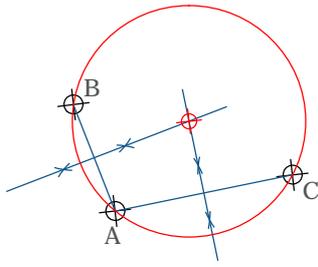


10 PRC



✳ Cuando no tenemos ningún punto, transformaremos una circunferencia en otra de radio cero, es decir en un PUNTO

PPP CIRCUNFERENCIA QUE PASE POR TRES PUNTOS DADOS



SOLUCIÓN DIRECTA

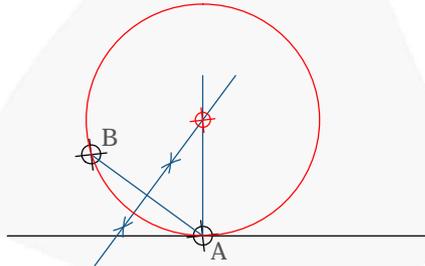
Siempre que tenemos dos puntos, cualquier circunferencia que pase por ambos tendrá su centro en su mediatriz (haz de centros).

Si tenemos tres puntos, hacemos dos mediatrices y en el corte de ambas estará el centro de la circunferencia SOLUCIÓN.

PPR CIRCUNFERENCIA QUE PASE POR DOS PUNTOS Y SEA TANGENTE A UNA RECTA

Dos posibilidades de ejercicio:

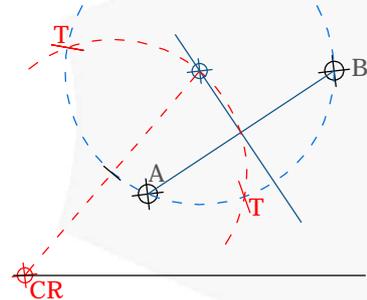
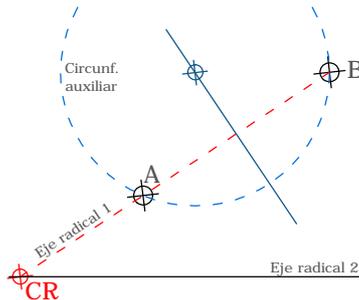
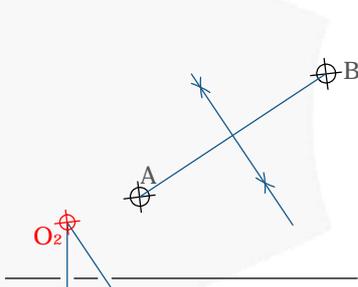
- 1) Uno de los puntos está sobre la recta



SOLUCIÓN DIRECTA

Si tenemos dos puntos, cualquier circunferencia que pase por ambos tendrá su centro en su mediatriz y si además uno de los puntos está sobre la recta, el centro estará en la perpendicular a esta.

- 2) Los dos puntos son externos a la recta



Si ningún punto está sobre la recta, necesitamos resolverlo por POTENCIAS

Ejes radicales:

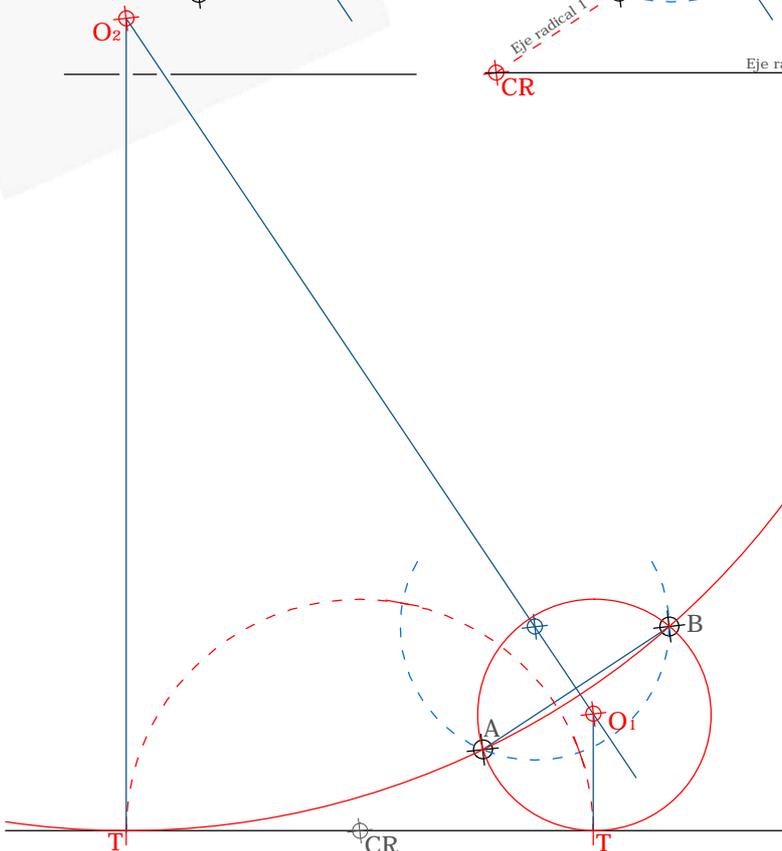
- 1) El que pasa por A y B
- 2) la propia recta r

Por tanto el CR será dónde se cortan.

Tenemos una haz de centros que será la mediatriz de AB así que sobre este dibujamos una circunferencia auxiliar que contenga a A y B.

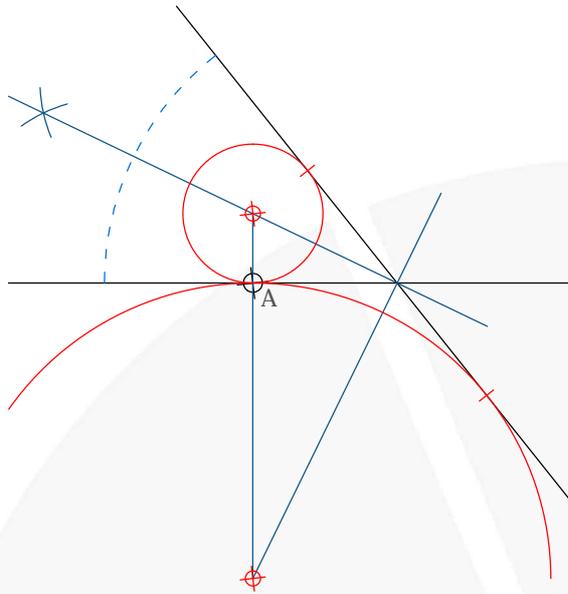
Desde el CR buscamos las tangentes a esta circunferencia y trazamos la circunferencia de igual potencia hasta que corta con r. Así tenemos T y T'

En su perpendicular a r y sobre el haz de centros encontramos los dos centros SOLUCIÓN.



Dos posibilidades de ejercicio:

1) El punto está sobre una de las rectas



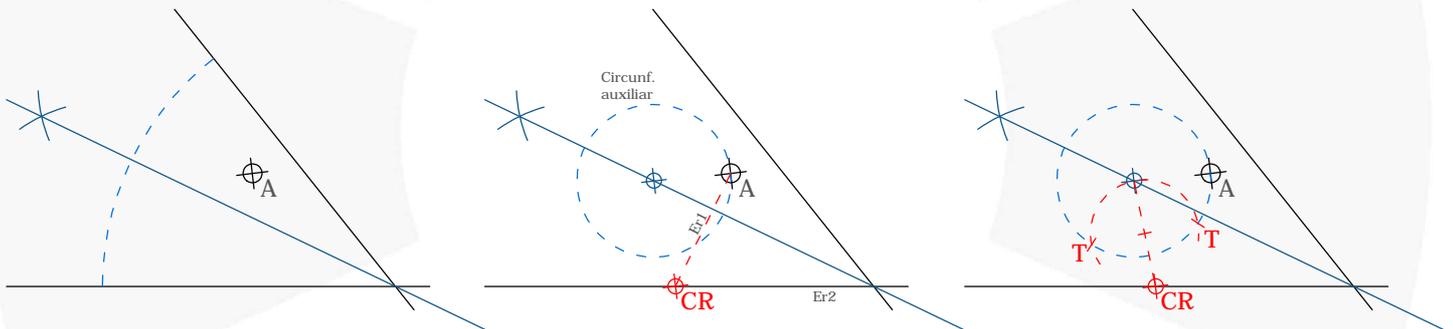
SOLUCIÓN DIRECTA

Si el punto está en una de las rectas, sabemos que el haz de centros estará en su perpendicular.

Los haces de centros que forman las dos rectas serán sus bisectrices (perpendiculares entre sí)

El punto de corte de ambos haces nos determinará los centros de las DOS CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN.

2) El punto no pertenece a ninguna de las rectas



Si el punto no está sobre ninguna de las dos rectas, utilizamos POTENCIAS:

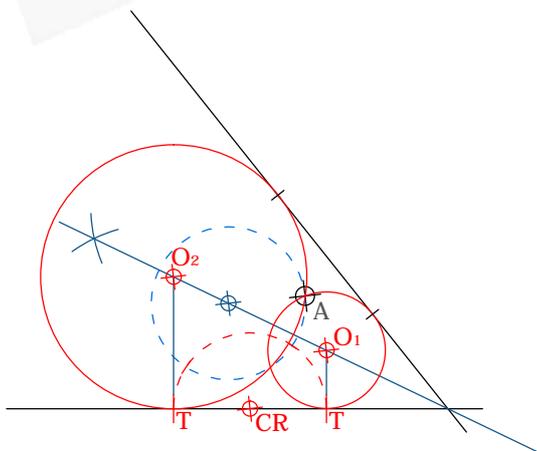
Tenemos claro que la bisectriz de las rectas será haz de centros. Así que trazamos una circunferencia auxiliar que pase por A y centro en la bisectriz.

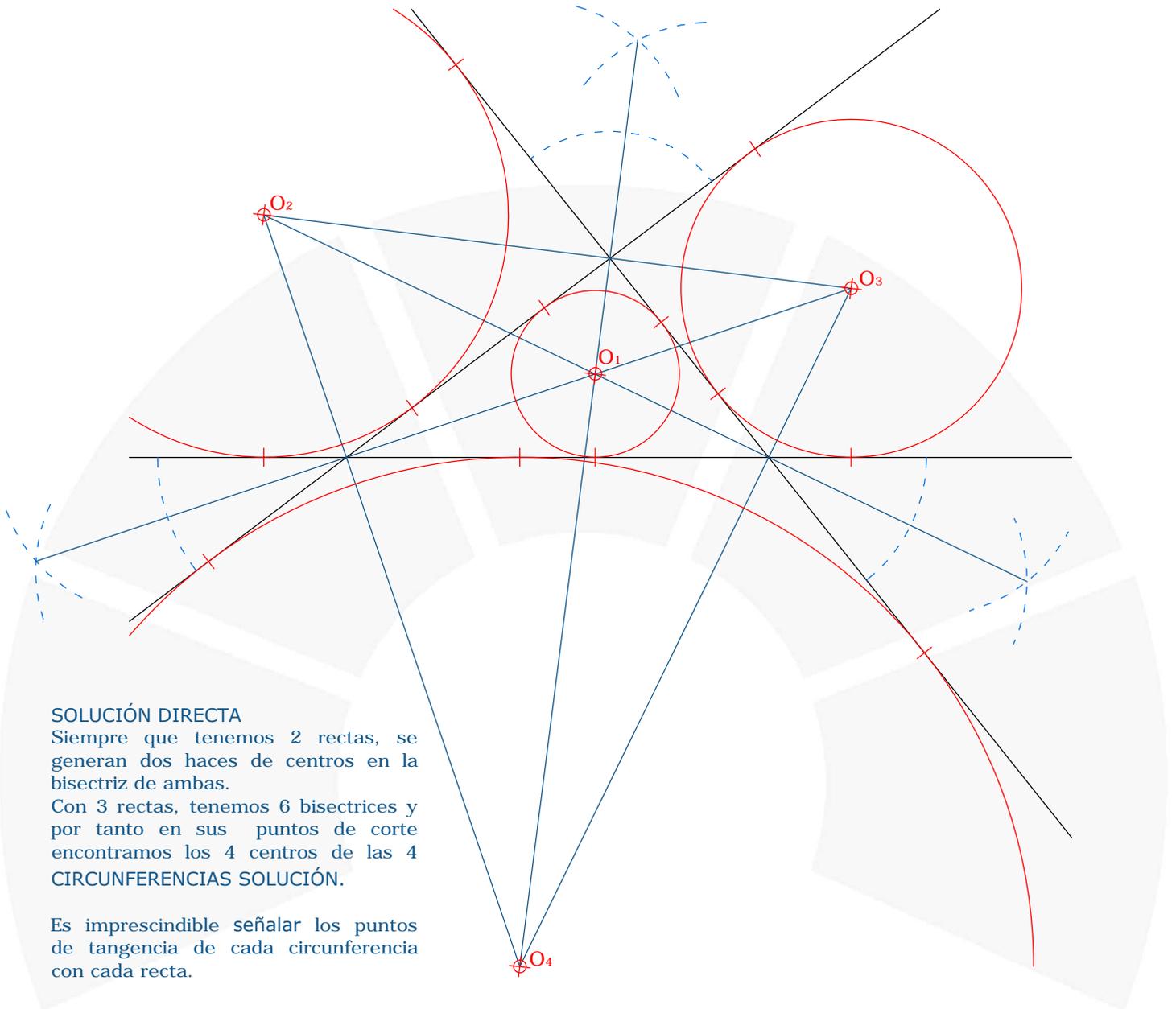
Trabajamos todo el ejercicio a partir de una de las dos rectas. De manera que esta será un eje radical. El otro será el que pase por A y por su simétrico, o sea la recta perpendicular al haz de centros-bisectriz. Por tanto el CR será dónde se cortan.

Desde el CR buscamos las tangentes a la circunferencia auxiliar y trazamos la circunferencia de igual potencia hasta que corta con r. Así tenemos T y T'

En su perpendicular a r y sobre el haz de centros encontramos los dos centros SOLUCIÓN.

Es imprescindible trazar los puntos de tangencia a la otra recta.





SOLUCIÓN DIRECTA

Siempre que tenemos 2 rectas, se generan dos haces de centros en la bisectriz de ambas.

Con 3 rectas, tenemos 6 bisectrices y por tanto en sus puntos de corte encontramos los 4 centros de las 4 CIRCUNFERENCIAS SOLUCIÓN.

Es imprescindible señalar los puntos de tangencia de cada circunferencia con cada recta.