

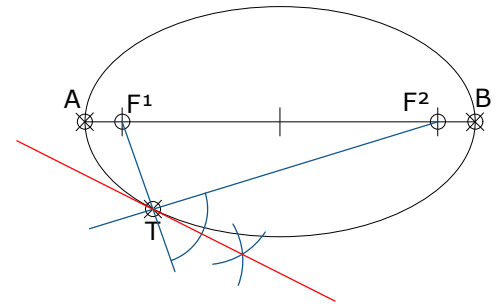
GEOMETRÍA TANGENCIAS a CURVAS CÓNICAS

TANGENCIAS A UNA ELIPSE

Una recta tangente a una elipse es la que la toca en un único punto por el exterior.
Cualquier tangente es la bisectriz del ángulo que forman las rectas que unen los focos con el punto de tangencia.
Vamos a poder construir elipses tomando como dato de partida una o más rectas tangentes a la misma.

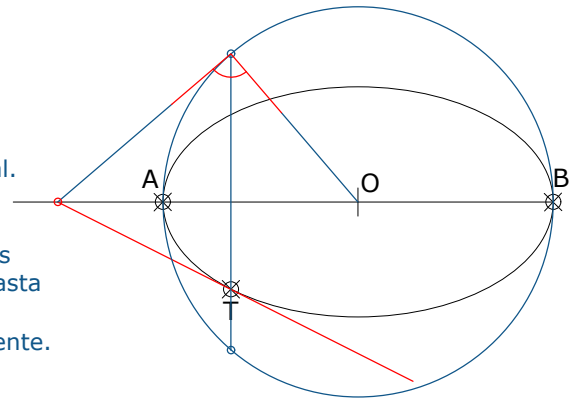
T1.1 RECTA TANGENTE POR UN PUNTO DADO DE LA ELIPSE a partir de sus focos

Dado el punto T y los focos de la elipse, trazamos dos rectas que pasen por los focos y por el punto de tangencia.
En la bisectriz de estas rectas encontramos la recta tangente.



T1.2 RECTA TANGENTE POR UN PUNTO DADO DE LA ELIPSE a partir de la circunferencia principal

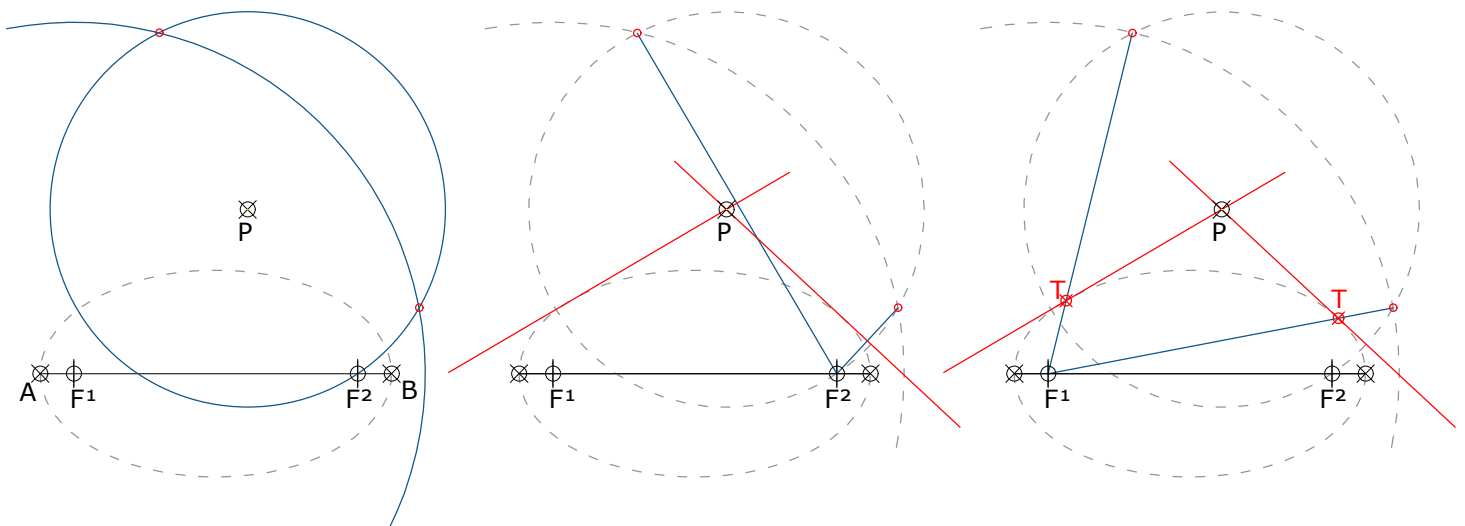
Dado el punto T y el eje real, trazamos la circunferencia principal.
1) Desde T y en perpendicular al eje, dibujamos una recta que corte a la circunferencia.
2) Unimos el punto de corte con el centro de la elipse y trazamos una recta perpendicular a este segmento que se prolongue hasta la recta que contiene al eje AB.
3) Al unir este último punto de corte con T encontramos la tangente.



T2.1 RECTAS TANGENTES DESDE UN PUNTO EXTERIOR a partir de la circunferencia focal

Dado el eje real, los focos y un punto exterior, (no es necesario tener la elipse representada)

- 1) Trazamos la circunferencia focal desde uno de los focos (x ej. F1)
- 2) Trazamos una circunferencia con centro en P y que pase por el otro foco (F2)
- 3) De los puntos de corte resultantes de ambas circunferencias, los unimos con F2. Las mediatrices de estos segmentos serán las rectas tangentes.
- 4) Al unir los puntos de corte con F1, encontraremos sobre las rectas los puntos exactos de tangencia.



T2.2 RECTAS TANGENTES DESDE UN PUNTO EXTERIOR

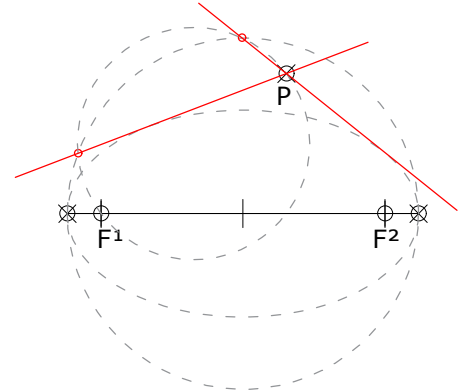
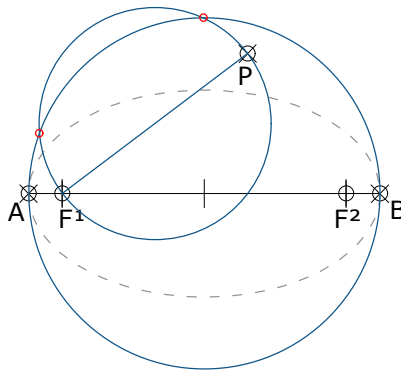
a partir de la circunferencia principal

Dado el eje real, los focos y un punto exterior,
(no es necesario tener la elipse representada)

- 1) Trazamos la circunferencia principal
- 2) Unimos uno de los focos con el punto P y desde su punto medio hacemos una circunferencia de diámetro FP.
- 3) Al unir los puntos de corte resultantes con P se dibujan las rectas tangentes.

* NOTA:

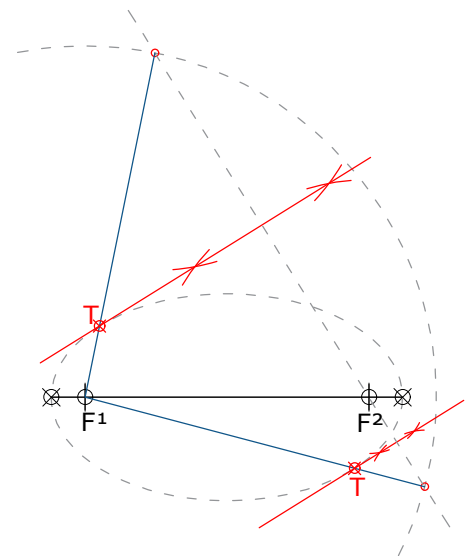
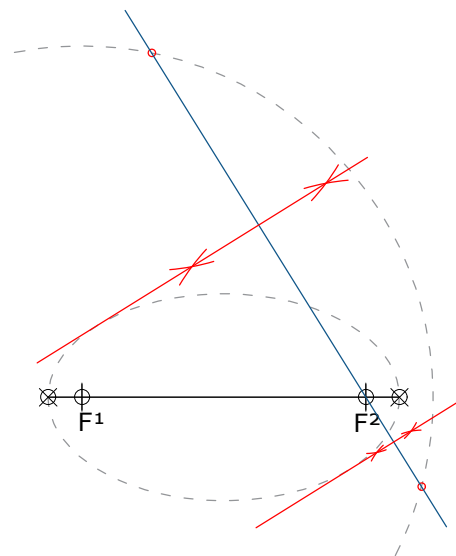
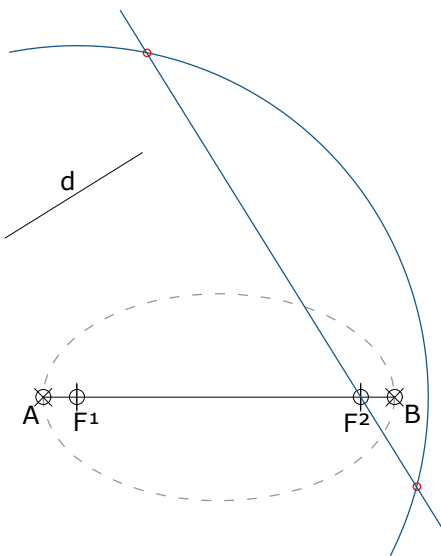
Por este método no se encuentran los puntos exactos de tangencia.



T3 RECTAS TANGENTES PARALELAS A UNA DIRECCIÓN DADA

Dado el eje real, los focos y una dirección, (no es necesario tener la elipse representada)

- 1) Trazamos la circunferencia focal desde uno de los focos (x ej. F1)
- 2) Trazamos por el otro foco (F2) una recta perpendicular a la dirección.
- 3) Dibujamos las mediatrices de los segmentos resultantes desde los puntos de corte hasta F2. Estos segmentos serán las rectas tangentes.
- 4) Al unir los puntos de corte con F1, encontraremos sobre las rectas los puntos exactos de tangencia.

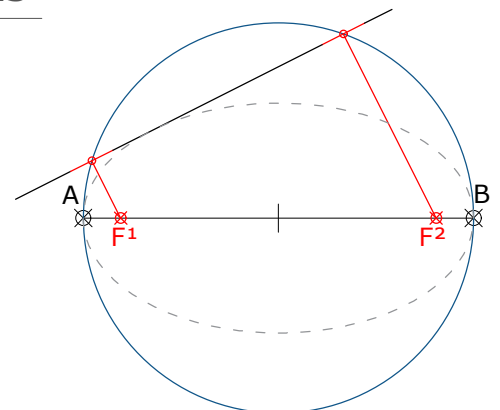


CONSTRUCCIONES A PARTIR DE RECTAS TANGENTES

CT1 CONSTRUCCIÓN DADOS EL EJE MAYOR Y UNA TANGENTE

Comenzamos trazando la circunferencia principal y localizamos los puntos de corte de la recta tangente con esta. Sobre el eje y en perpendicular a la tangente desde estos puntos, encontramos los focos F1 y F2.

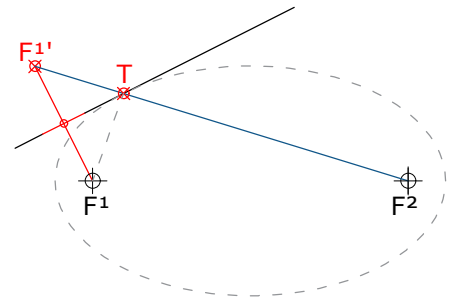
Para dibujar la elipse utilizamos cualquier procedimiento de los anteriores a partir del eje y los focos.



CT2 CONSTRUCCIÓN DADOS LOS DOS FOCOS Y UNA TANGENTE

Para dibujar la elipse necesitamos conocer la medida del eje real AB, Para esto, primero vamos a localizar el punto de tangencia.

- 1) Dibujamos el simétrico de uno de los focos respecto la tangente $F1'$
- 2) Unimos $F1'$ y $F2$ y corta a la recta en el punto de tangencia.
- 3) Sabemos que la suma de las distancias $F1P+F2P$ es igual a constante e igual a AB , de forma que ya podemos representar la elipse mediante procedimientos anteriores.

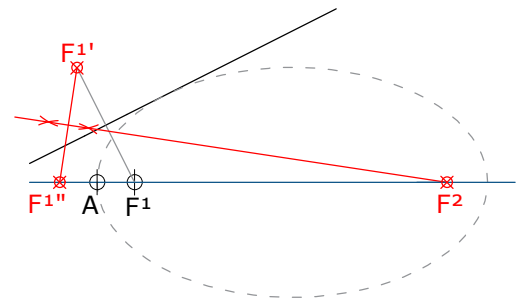
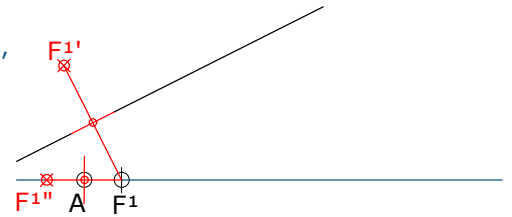


CT3 CONSTRUCCIÓN DADOS UN VÉRTICE, UN FOCO Y UNA TANGENTE

Para dibujar la elipse necesitamos conocer el eje real AB y los dos focos,

- 1) Dibujamos el simétrico del foco respecto la tangente $F1'$ y el simétrico respecto A, $F1''$
- 2) Unimos ambos simétricos y trazamos su mediatriz, en la extensión de esta con la recta $AF1$, está $F2$ y por tanto podemos conocer el extremo B del eje.

Una vez que conocemos los dos focos y el eje real podemos realizar la construcción de la elipse por cualquiera de los métodos habituales.

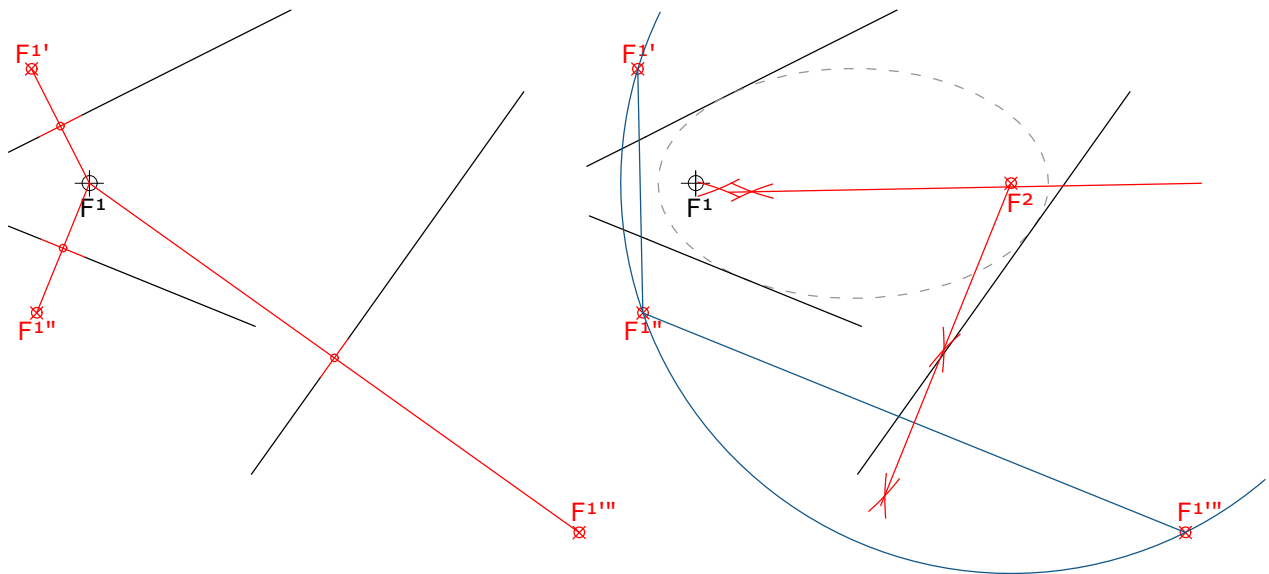


CT4 CONSTRUCCIÓN DADOS UN FOCO Y TRES TANGENTES

Para dibujar la elipse necesitamos conocer el eje real AB y los dos focos,

- 1) Dibujamos los simétricos de $F1$ respecto cada tangente.
- 2) Trazamos la circunferencia que forman los tres puntos simétricos. Esta es la circunferencia focal (de diámetro AB) y el centro de la misma es el foco $F2$.

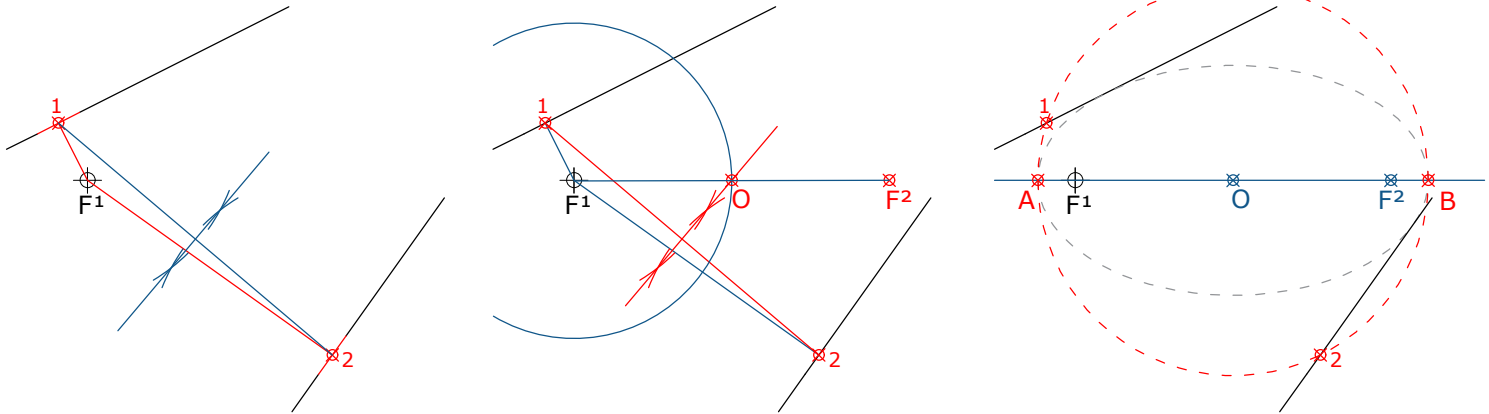
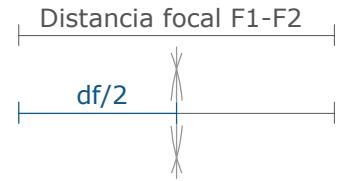
A partir de aquí podemos continuar con cualquiera de los procedimientos anteriores.



CT5 CONSTRUCCIÓN DADOS UN FOCO, LA DISTANCIA FOCAL Y DOS TANGENTES

Conocido un foco y la distancia entre ambos focos, necesitamos averiguar la posición de F2 y la medida del eje AB.

- 1) Desde el foco F1 y en perpendicular a las tangentes encontraremos los puntos 1 y 2 pertenecientes a la circunferencia principal. Los unimos y en su mediatriz sabremos que estará el centro.
- 2) Conocida la distancia focal, la mitad de esta contendrá al centro O. En el punto de corte de la circunferencia $df/2$ y la mediatriz encontramos O y por simetría F2.
- 3) Dibujamos la circunferencia principal y encontramos el diámetro AB



TANGENCIAS A UNA PARÁBOLA

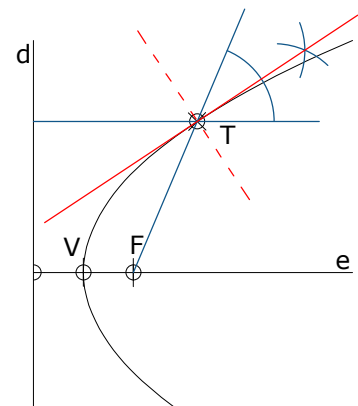
Una recta tangente a una parábola es la que la toca en un único punto por el exterior.

Cualquier tangente es la bisectriz del ángulo que forma la recta que une el foco con el punto de tangencia y la perpendicular desde este punto a la directriz.

Las rectas tangentes se van a convertir en un dato más para la construcción de parábolas.

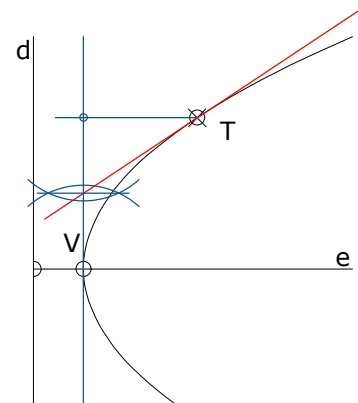
T1.1 RECTA TANGENTE POR UN PUNTO DADO DE LA PARÁBOLA a partir de su foco

Dado el punto T y el foco de la parábola y la directriz, trazamos la recta de unión F-T y la recta perpendicular a la directriz que pasa por T. En la bisectriz de estas rectas encontramos la recta tangente. Y la perpendicular a la bisectriz es la llamada "normal"

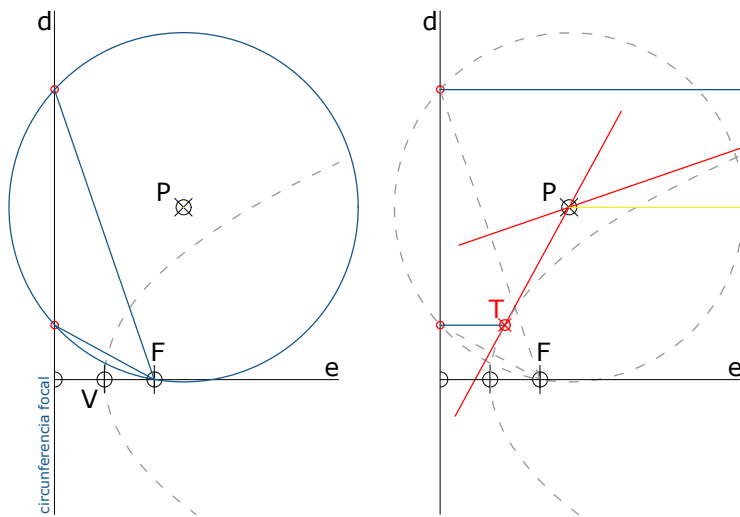


T1.2 RECTA TANGENTE POR UN PUNTO DADO DE LA PARÁBOLA mediante paralelas

Dado el punto T se traza por el una paralela al eje, y desde el vértice una perpendicular (// a la directriz). Se encuentra el punto medio del segmento comprendido desde el punto de corte de las rectas anteriores y V. La recta tangente pasará por este punto y por T.



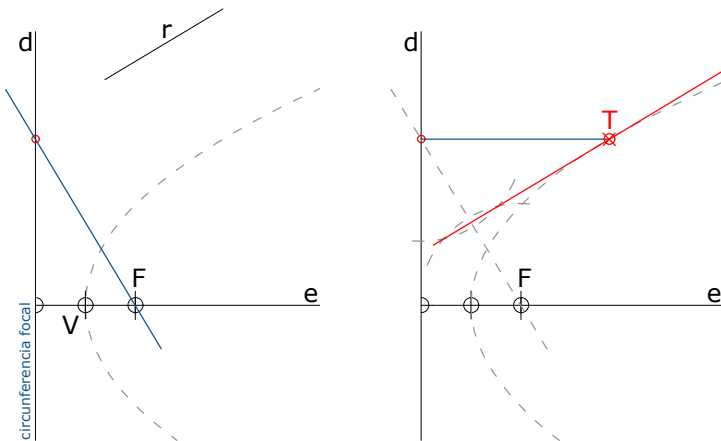
T2 RECTAS TANGENTES DESDE UN PUNTO EXTERIOR



Dados foco, directriz y un punto exterior, (no es necesario tener la parábola representada)

- 1) Sabemos que la circunferencia focal es la directriz.
- 2) Dibujamos la circunferencia con centro en P y radio hasta el foco.
- 3) Unimos los puntos de corte de la circunferencia con la directriz con el foco. Desde el punto medio de los segmentos y pasando por P tenemos las tangentes.
- 4) Para encontrar los puntos de tangencia, trazamos desde los puntos de corte sobre la directriz, rectas perpendiculares a esta. Y sobre las rectas tangentes tendremos los puntos T.

T3 RECTA TANGENTE DADA UNA DIRECCIÓN



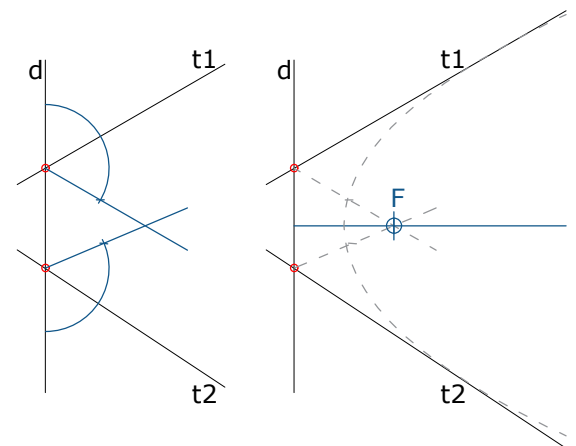
Dados foco, directriz y una recta-dirección, (no es necesario tener la parábola representada)

- 1) Sabemos que la circunferencia focal es la directriz.
- 2) Dibujamos la recta perpendicular a r que pase por el foco y corte a la directriz. En la mediatriz entre F y el punto de corte, está la recta tangente.
- 3) Para encontrar el punto de tangencia, trazamos desde el punto de corte la recta perpendicular a la directriz y sobre la tangente tendremos T.

CONSTRUCCIONES A PARTIR DE RECTAS TANGENTES

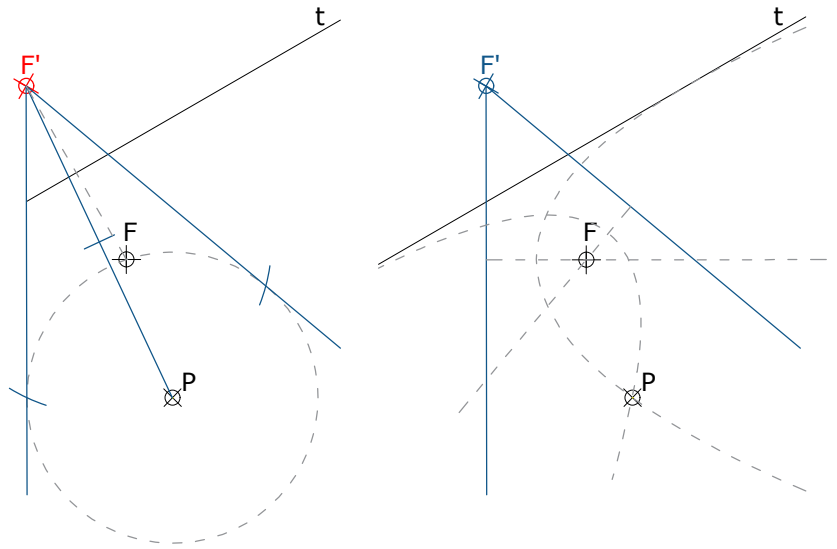
CT1 CONSTRUCCIÓN DADAS DOS TANGENTES Y LA DIRECTRIZ

Con cada una de las rectas tangentes, vamos a hacer una recta simétrica a la directriz, desdoblado los ángulos desde los puntos de corte.
Dónde interseccionan las dos simétricas tenemos el foco de la curva.



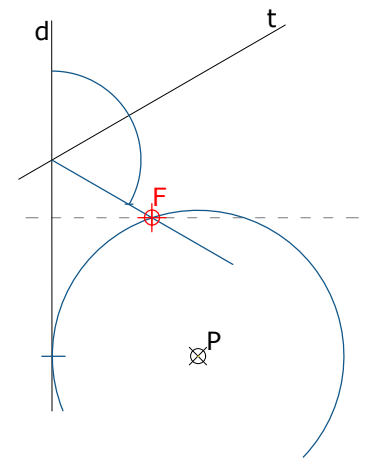
CT2 CONSTRUCCIÓN DADO EL FOCO, UNA TANGENTE Y UN PUNTO DE LA CURVA

- 1) Lo primero buscamos el punto F' , simétrico del foco respecto a la recta tangente.
- 2) Trazamos una circunferencia con centro P y radio PF .
- 3) Las rectas tangentes desde F' a esta circunferencia serán posibles directrices del ejercicio. Tendremos dos soluciones posibles.



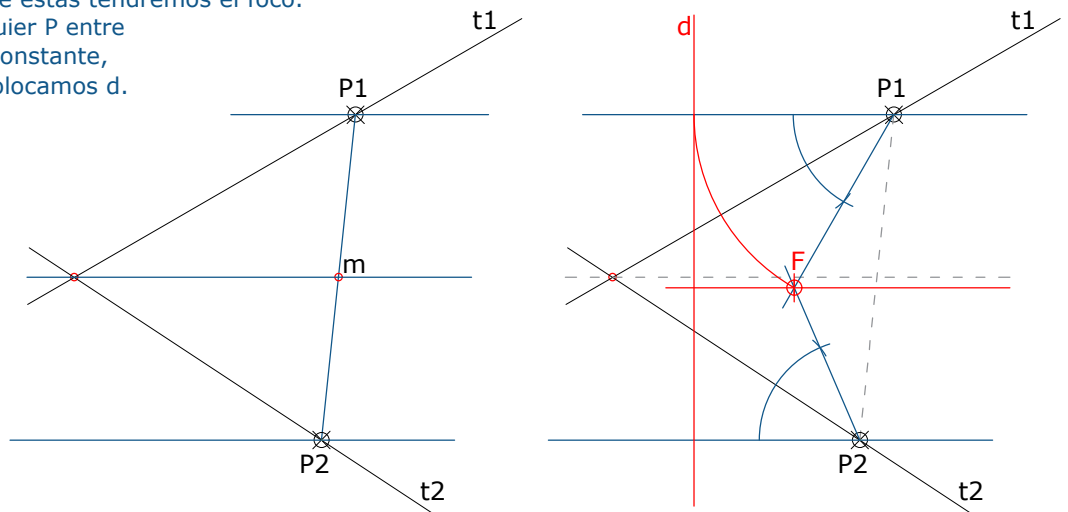
CT3 CONSTRUCCIÓN DADA LA DIRECTRIZ, UNA TANGENTE Y UN PUNTO DE LA CURVA

Como la excentricidad es igual a 1. Al hacer una circunferencia desde P tangente a la directriz, sabemos que en esta curva se encontrará el foco. De la misma forma, al hacer una simetría de la directriz desde la tangente encontraremos el punto de corte y por tanto el FOCO. En perpendicular a la directriz y desde el foco, completamos el eje y ya tenemos todos los datos para dibujar la parábola.



CT4 CONSTRUCCIÓN DADAS DOS TANGENTES Y LOS PUNTOS DE TANGENCIA

Al unir el punto medio del segmento que une los puntos P_1 y P_2 y el punto de corte de las rectas tangentes obtenemos la dirección del eje. Desde los puntos P_1 y P_2 , trazamos paralelas a la dirección y sus rectas simétricas. En el corte de estas tendremos el foco. La distancia desde cualquier P entre el foco y la directriz es constante, así que de esta forma colocamos d .



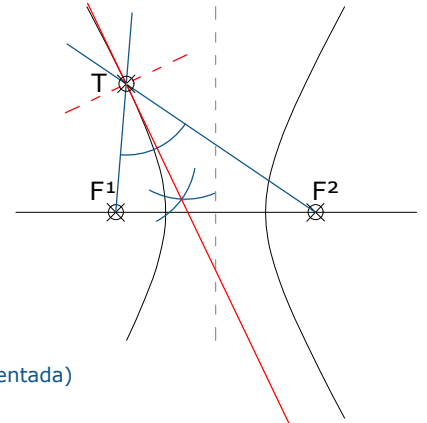
TANGENCIAS A UNA HIPÉRBOLA

Una recta tangente a una hipérbola es la que la toca a una de sus ramas en un único punto por el exterior. Cualquier tangente es la bisectriz del ángulo que forman que forman las rectas que unen los focos con el punto de tangencia.

La recta normal es la perpendicular a la tangente por el punto de tangencia.

T1 RECTA TANGENTE POR UN PUNTO DADO DE LA HIPÉRBOLA

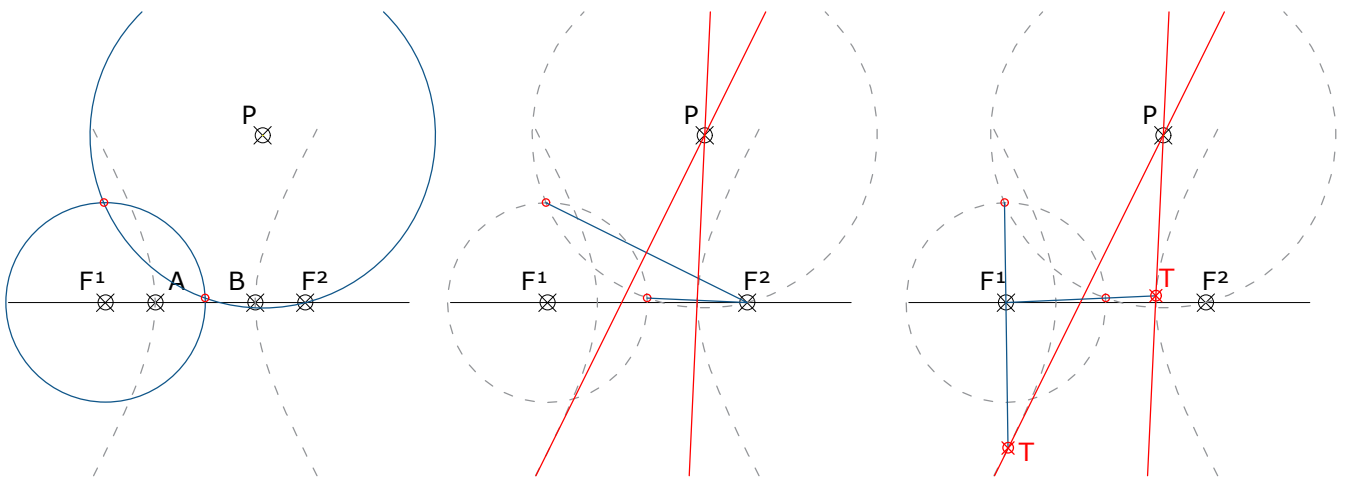
Dado el punto T y los focos de la hipérbola, trazamos las rectas de unión F-T y hacemos la bisectriz entre ambas. Esa será la recta tangente y la perpendicular a la bisectriz es la llamada "normal"



T2 RECTAS TANGENTES DESDE UN PUNTO EXTERIOR

Dado el eje, los focos y un punto exterior, (no es necesario tener la hipérbola representada)

- 1) Trazamos la circunferencia focal desde uno de los focos (x ej. F1)
- 2) Trazamos una circunferencia con centro en P y que pase por el otro foco (F2)
- 3) De los puntos de corte resultantes de ambas circunferencias, los unimos con F2. Las mediatrices de estos segmentos serán las rectas tangentes.
- 4) Al unir los puntos de corte con F1, encontraremos sobre las rectas los puntos exactos de tangencia.

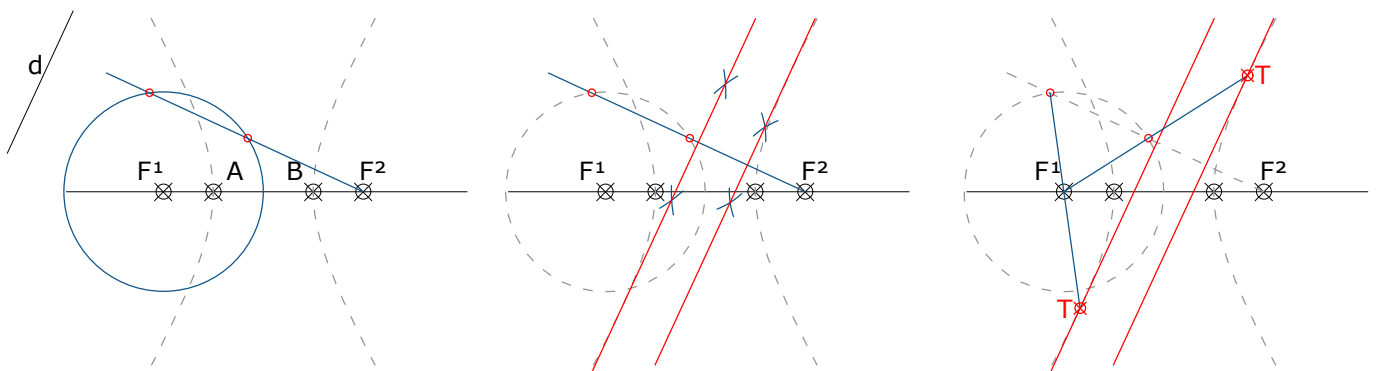


T3 RECTAS TANGENTES PARALELAS A UNA DIRECCIÓN DADA

Dado el eje, los focos y una dirección, (no es necesario tener la hipérbola representada)

Ojo!! no cualquier dirección es válida. Deben estar suficientemente inclinadas.

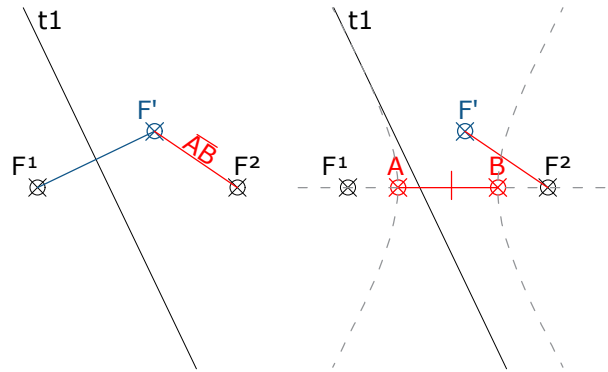
- 1) Trazamos la circunferencia focal desde uno de los focos (x ej. F1)
- 2) Trazamos por el otro foco (F2) una recta perpendicular a la dirección. Dibujamos las mediatrices de los segmentos resultantes desde los puntos de corte hasta F2. Estos segmentos serán las rectas tangentes.
- 3) Al unir los puntos de corte con F1, encontraremos sobre las rectas los puntos exactos de tangencia.



CONSTRUCCIONES A PARTIR DE RECTAS TANGENTES

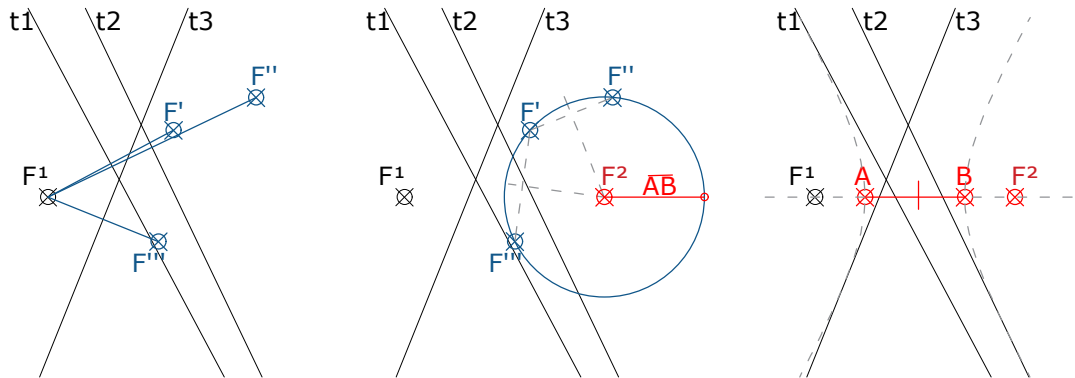
CT1 CONSTRUCCIÓN DADOS LOS FOCOS Y UNA TANGENTE

Lo primero trazamos el simétrico de uno de los focos respecto la recta tangente. La distancia entre el simétrico y el foco restante es la del eje real AB . Desde la mediatriz del segmento F_1-F_2 colocamos esta distancia y ya tenemos los datos necesarios para realizar la construcción de la hipérbola.



CT2 CONSTRUCCIÓN DADO UN FOCO Y TRES TANGENTES

Lo primero trazamos el simétrico del foco dado respecto cada una de las rectas tangentes. Los tres simétricos forman una circunferencia cuyo centro es el otro foco y el radio de la misma es el eje AB . Desde la mediatriz del segmento F_1-F_2 colocamos esta distancia y tenemos los datos necesarios para construir la hipérbola.



CT3 CONSTRUCCIÓN DADO EL EJE REAL AB Y UNA TANGENTE

Buscamos el centro del eje y trazamos una circunferencia desde allí con diámetro AB . En los puntos donde corta con la tangente, hacemos perpendiculares a estas hasta cortar con la extensión del eje. Allí tenemos los focos.

